

Esercizi sugli insiemi numerici e sulle funzioni.

1. Determinare l'estremo superiore e inferiore del seguente insieme numerico, specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \pi + \frac{2(-1)^n}{n\pi}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

2. Determinare l'estremo superiore e inferiore del seguente insieme numerico, specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} : \frac{x+3}{4-x^2} < 0 \right\}.$$

3. Determinare l'estremo superiore e inferiore del seguente insieme numerico, specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

4. Determinare l'estremo superiore e inferiore del seguente insieme numerico, specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R} : y = 10^{\frac{n+1}{n}}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

5. Determinare l'estremo superiore e inferiore del seguente insieme numerico, specificando se si tratta, rispettivamente, di minimo e massimo:

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R} : z = \log_{10} \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

6. Siano dati gli insiemi numerici

$$X = \{-7\} \cup]-3, 2[\cup \{7, 9\} \quad \text{e} \quad Y = [-7, -2[\cup]5, 9[.$$

Quali delle seguenti affermazioni è **FALSA** ?

- (A) 9 è un punto interno di X ed un punto di accumulazione di Y ;
- (B) X ha infiniti punti di accumulazione;
- (C) $X \cup Y = [-7, 2[\cup]5, 9[$;
- (D) Y ha infiniti punti di accumulazione;
- (E) Nessuna delle precedenti;

7. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \frac{2^x - 1}{x^2 - 4}$$

8. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione reale di variabile reale:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^7 - 1}}{x^2 + 1}$$

9. Siano assegnate le funzioni $f(x) = 1/(1-x)$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.

Si trovi la funzione composta $h(x) = f \circ g(x)$ e se ne individui il dominio **H**.

10. Sia data la funzione $f(x) = x^2 - 6x$ definita in tutto \mathbb{R} . Indicare la eventuale simmetria della funzione $f(x)$.
Suggerimento: mediante un cambio di coordinate $x = x' + a$ cercare una simmetria rispetto all'asse y .

11. Siano assegnate le funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$.
 Si considerino le funzioni $h_1(x) = f(x)/g(x)$ e $h_2(x) = g(x)/f(x)$.
 Detti \mathbf{H}_1 ed \mathbf{H}_2 i domini rispettivamente delle funzioni $h_1(x)$ ed $h_2(x)$ trovare l'insieme $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$.

12. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) \right\}$$

13. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^4 - 2n}{n^2 + 1}$$

14. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$$

15. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{4+x} - 1)^{\frac{1}{x}}$$

16. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x^2)$$

17. Studiare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la continuità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x^k} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

18. Siano X, Y, Z, W i seguenti insiemi numerici:

$$X = \left\{ 1 + \frac{1}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{3\}$$

$$Y = [0, 1] \cup [2, 4]$$

$$Z = X \cup Y; \quad W = X \cap Y$$

Quale delle seguenti asserzioni è FALSA? (DX, FX e \bar{X} denotano, rispettivamente, l'insieme dei punti di accumulazione, di frontiera e interni di X , e $|X|$ indica la cardinalità di X .)

(A) : $FX = X \cup \{1\}$;

(B) : Z non è chiuso;

(C) : $DW = \emptyset$;

(D) : $\bar{Z} \neq \bar{Y}$;

(E) : $|FY| = 4$;

19. Determinare per quali valori reali di a la seguente funzione è continua in \mathbb{R} .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2 + 1 & \text{if } x < a \\ |x - 3| & \text{se } x \geq a \end{cases}$$

20. Dato l'insieme numerico $X = [3, 5] \cup \{7\}$ ed indicato con DX l'insieme dei suoi punti di accumulazione quale delle seguenti affermazioni è vera?

(A) $DX =]3, 5[$; (B) $DX = [3, 5[$; (C) $DX = X$;

(D) $DX = [3, 5]$; (E) Nessuno delle precedenti;